Über schiebungsinvariante lineare Interpolationen

Inaugural-Dissertation

der philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

HANS WENGER
(Thierachern)

BERN
Gedruckt bei Stämpfli & Cie.
1943

Über schiebungsinvariante lineare Interpolationen

Inaugural-Dissertation

der philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

HANS WENGER

(Thierachern)

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag
der Herren Prof. Dr. H. Hadwiger und Prof. Dr. A. Alder angenommen.

Bern, den 4. März 1943.

Der Dekan: Prof. Dr. *A. Alder*.

BERN

Gedruckt bei Stämpfli & Cie.

1943

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

An dieser Stelle möchte ich meinen Lehrern, den Herren Professoren *Alder*, *Bohren*, *Scherrer*, *Hadwiger*, *Michel* und *Amonn*, für die mir während meines Studiums erwiesenen Anregungen meinen besten Dank aussprechen.

Ganz besonders fühle ich mich Herrn Prof. *Hadwiger* zu Dank verpflichtet. Seine reichen Anregungen und wertvolle Unterstützung ermöglichten die Entstehung und Durchführung der vorliegenden Arbeit.

Inhalt.

Seite

§ 1. Definition der schiebungsinvarianten linearen Interpolation 5
§ 2. Die Interpolation von Lagrange 7
§ 3. Die trigonometrische Interpolation 8
§ 4. Charakterisierung der schiebungsinvarianten Funktionensysteme durch Funktionalgleichungen 10
§ 5. Matrizenrelationen 12
§ 6. Charakterisierung der schiebungsinvarianten Funktionensysteme durch Differentialgleichungen 13
§ 7. Charakterisierung der schiebungsinvarianten Funktionensysteme durch schiebungsinvariante lineare Mannigfaltigkeiten 15
§ 8. Die schiebungsinvariante lineare Interpolation auf unendlichem Intervall 22
Schlussbemerkung 31

Über schiebungsinvariante lineare Interpolationen.

§ 1.

Definition der schiebungsinvarianten linearen Interpolation.

Den $2n+1$ Argumentwerten $-n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n$ ordnen wir ein System von $2n+1$ beliebigen, reellen Ordinatenwerten $A_\nu \; [\nu = -n, \ldots, n]$ zu.

Es sei $\varphi_\nu(x) \; [\nu = -n, \ldots, n]$ ein System von $2n+1$ ganzen Funktionen, welche für reelle Argumente reelle Werte annehmen, mit der Eigenschaft

$$\varphi_\nu(\mu) = \delta_{\nu\mu}, \delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 0 \; (\nu \neq \mu) \\ \\ 1 \; (\nu = \mu) \end{cases} \quad [\nu, \mu = -n, \ldots, n]. \tag{1}$$

Die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ sind offenbar im Intervall $[-n, n]$ linear unabhängig.

Die dem Ordinatensystem $\{A_\nu\}$ zugeordnete Funktion

$$F(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} A_\nu \varphi_\nu(x) \tag{2}$$

hat die Eigenschaft

$$F(\nu) = A_\nu. \tag{3}$$

Sie stellt also eine *interpolierende Funktion* dar. Sind $\{A_\nu\}$ und $\{B_\nu\}$ zwei Ordinatensysteme, $F_A(x)$ und $F_B(x)$ ihre interpolierenden Funktionen, so gilt für die interpolierende Funktion $F_C(x)$ des Systems $\{C_\nu\} = \{\lambda A_\nu + \mu B_\nu\}$

$$F_C(x) = \lambda F_A(x) + \mu F_B(x).$$

Mit (2) ist also eine *lineare Interpolation* definiert.

Die geforderte Eigenschaft (1) ist notwendig und hinreichend dafür, dass die Bedingung (3) erfüllt ist. Die Notwendigkeit ergibt sich leicht:

Aus

$$\sum_{\nu=-n}^{n} \varphi_\nu(\mu)\, A_\nu = A_\mu \,[\mu = -n, \ldots, n]$$

folgt

$$\sum_{\nu=-n}^{n} (\varphi_\nu(\mu) - \delta_{\nu\mu})\, A_\nu = 0 \,[\mu = -n, \ldots, n].$$

Da dieses lineare homogene Gleichungssystem für jedes beliebige System $\{A_\nu\}$ erfüllt sein soll, muss gelten

$$\varphi_\nu(\mu) = \delta_{\nu\mu} \,[\nu, \mu = -n, \ldots, n].$$

Dass die Bedingung hinreicht, ist unmittelbar einzusehen.

Im Hinblick auf (3) können wir für (2) schreiben

$$F(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} F(\nu)\, \varphi_\nu(x).$$

Durch die Forderung, dass für jedes Ordinatensystem $\{A_\nu\}$ und jedes y gilt

$$F(x+y) = \sum_{\nu=-n}^{n} F(\nu+y)\, \varphi_\nu(x) \,[-\infty < y < \infty], \tag{4}$$

definieren wir die *schiebungsinvariante lineare Interpolation.*

Das Bestehen der Relation (4) ist auf eine besondere Eigenschaft des zur linearen Interpolation verwendeten Funktionensystems $\{\varphi_\nu(x)\}$ zurückzuführen. Wenn (4) erfüllt ist, nennen wir $\{\varphi_\nu(x)\}$ ein *schiebungsinvariantes Funktionensystem.*

Wir erläutern den Begriff der Schiebungsinvarianz der linearen Interpolation noch etwas ausführlicher:

Die Funktion (2) liefert für die Argumente $\nu + y \,[\nu = -n, \ldots, n]$ die Ordinaten $F(\nu + y)$. Die interpolierende Funktion des Ordinatensystems $\{F(\nu + y)\}$, gebildet mit demselben Funktionensystem $\{\varphi_\nu(x)\}$, ist

$$\bar{F}(x+y) = \sum_{\nu=-n}^{n} F(\nu+y)\, \varphi_\nu(x).$$

Im allgemeinen ist

$$\overline{F}(x+y) \not\equiv F(x+y).$$

Wenn aber ein schiebungsinvariantes Funktionensystem vorliegt, so gilt (4) und daher

$$\overline{F}(x+y) \equiv F(x+y).$$

Wegen dieser Eigenschaft sind unsere oben eingeführten Bezeichnungen gerechtfertigt.

§ 2.

Die Interpolation von Lagrange.

Nach Lagrange sind für die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ $[\nu = -n, \ldots, n]$ Polynome vom Grade $2n$ zu setzen, derart, dass die Bedingungen (1) erfüllt sind.

So ergibt sich für $n = 1$

$$\varphi_{-1}(x) = \frac{x(x-1)}{2},\ \varphi_0(x) = 1 - x^2,\ \varphi_1(x) = \frac{x(x+1)}{2},$$

und allgemein [1])

$$\varphi_\nu(x) = \frac{g(x)}{(x-\nu)\,g'(\nu)},\ g(x) = x(x^2-1^2)\ldots(x^2-n^2). \qquad (5)$$

Dass die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ ein schiebungsinvariantes System darstellen, folgt aus algebraischen Gründen: Die interpolierende Funktion (2) stellt ein Polynom dar, dessen Grad $\leqslant 2n$ ist. Da durch $2n+1$ Funktionswerte ein solches Polynom eindeutig bestimmt ist, folgt

$$\overline{F}(x+y) \equiv F(x+y).$$

---

[1]) R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. I, Seite 275. Springer, Berlin 1930.

§ 3.

Die trigonometrische Interpolation.

Für die Funktionen $\varphi_\nu(x)\ [\nu = -n, \ldots, n]$ werden trigonometrische Polynome n-ten Grades gewählt, derart, dass die Bedingungen (1) erfüllt sind.

Man erhält [1])

für $n = 1$

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left\{\cos\ \frac{2\pi}{3}\nu\ \cos\ \frac{2\pi}{3}x + \sin\ \frac{2\pi}{3}\nu\ \sin\ \frac{2\pi}{3}x\right\} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ \cos\ \left\{\frac{2\pi}{3}(x-\nu)\right\},$$

oder

$$\varphi_\nu(x) = \frac{\sin\ \pi(x-\nu)}{3\ \sin\ \dfrac{\pi(x-\nu)}{3}}\quad [\nu = -1, 0, 1],$$

und allgemein

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+1}\sum_{\sigma=1}^{n}\left\{\cos\ \frac{2\pi}{2n+1}\sigma\nu\ \cos\ \frac{2\pi}{2n+1}\sigma x + \right.$$

$$\left. + \sin\ \frac{2\pi}{2n+1}\sigma\nu\ \sin\ \frac{2\pi}{2n+1}\sigma x\right\}. \qquad (6)$$

Mit Hilfe der bekannten Summenformel [2])

$$\sum_{\sigma=1}^{n}\cos\ (a+\sigma z) = \frac{\sin\ \left[a+(2n+1)\dfrac{z}{2}\right] - \sin\ \left(a+\dfrac{z}{2}\right)}{2\ \sin\ \dfrac{z}{2}} \qquad (7)$$

---

[1]) R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. I, Seite 356 ff. Springer, Berlin 1930.

[2]) K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Seite 368. Springer, Berlin 1931.

lässt sich die Darstellung (6), die auch als

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+1} \sum_{\sigma=1}^{n} \cos \frac{2\pi}{2n+1} (x-\nu)\sigma$$

geschrieben werden kann, auf die Form

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{2n+1} \frac{\sin \pi(x-\nu)}{\sin \frac{\pi}{2n+1}(x-\nu)} \quad [\nu = -n, \ldots, n] \tag{8}$$

bringen.

Die Funktion

$$F(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} A_\nu \varphi_\nu(x)$$

gestattet eine geometrische Deutung:

Wir fassen die Ordinatenwerte $A_{-n}, \ldots, A_n$ als Koordinaten eines Punktes P im $(2n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raum auf. Drehen wir das Koordinatensystem um die Achse $O\,(0, \ldots, 0) \cdot E\,(1, \ldots, 1)$ um den Winkel $\theta = \frac{2\pi}{2n+1} x$, so ergeben sich für die auf das neue System bezogenen Koordinaten des festgelassenen Punktes P die Werte

$$A_i(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha(x+i-k)\, A_k,$$

wobei

$$\alpha(x) = \frac{1}{2n+1} \frac{\sin \pi x}{\sin \frac{\pi}{2n+1} x}$$

ist.

Wie man leicht verifiziert, gelten die Relationen

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha(x+i-k) = 1$$

$$\sum_{i=-n}^{n} \alpha(x+i-k)\,\alpha(x+i-l) = \delta_{kl}$$

$$\text{Det } \|\alpha(x+i-k)\| = 1.$$

Diese sind für die erwähnte Koordinatentransformation kennzeichnend.

Vergleichen wir mit der oben angegebenen trigonometrischen Interpolation, so finden wir, dass

$$A_i(x) = F(x+i)$$

ist.

Gestützt auf diese geometrische Interpretation der trigonometrischen Interpolation können wir nun ihre Schiebungsinvarianz folgern.

Diese ist eine einfache Folge des Kompositionsgesetzes in der speziellen Drehgruppe, wonach sich die Drehwinkel bei Nacheinanderausführung von Drehungen additiv verhalten.

§ 4.

Charakterisierung der schiebungsinvarianten Funktionensysteme durch Funktionalgleichungen.

Satz: Notwendig und hinreichend für die Schiebungsinvarianz eines Funktionensystems $\{\varphi_\nu(x)\}$ *ist die Gültigkeit der Relationen* (1) *und*

$$\varphi_\mu(x+y) = \sum_{\nu=-n}^{n} \varphi_\mu(\nu+y)\,\varphi_\nu(x) \quad [\mu = -n, \ldots, n]. \tag{9}$$

Beweis: 1. Das Funktionensystem $\{\varphi_\nu(x)\}$ sei schiebungsinvariant. Es gilt laut Definition neben (1)

$$F(x+y) = \sum_{\nu=-n}^{n} F(\nu+y)\,\varphi_\nu(x). \tag{4}$$

Wählen wir der Reihe nach die $2n+1$ Ordinatensysteme

$$\{A_{\mu\nu}\} = \delta_{\mu\nu} \quad [\nu, \mu = -n, \ldots, n],$$

so erhalten wir aus (4) das Funktionalgleichungssystem

$$\varphi_\mu(x+y) = \sum_{\nu=-n}^{n} \varphi_\mu(\nu+y)\,\varphi_\nu(x) \quad [\mu = -n, \ldots, n]. \tag{9}$$

2. Gelten umgekehrt neben (1) die Relationen (9), so folgt

$$F(x+y) = \sum_{\mu=-n}^{n} A_\mu \varphi_\mu(x+y)$$

$$= \sum_{\mu=-n}^{n} \sum_{\nu=-n}^{n} A_\mu \varphi_\mu(\nu+y)\, \varphi_\nu(x)$$

$$F(x+y) = \sum_{\nu=-n}^{n} F(\nu+y)\, \varphi_\nu(x). \tag{4}$$

* * *

Dass die Lagrangeschen Polynome dem Funktionalgleichungssystem (9) genügen, können wir verifizieren, indem wir die Taylorsche Reihenentwicklung ansetzen:

$$\varphi_\mu(y+x) = \sum_{\lambda=0}^{2n} \frac{\varphi_\mu^{(\lambda)}(y)}{\lambda!}\, x^\lambda$$

$$\varphi_\mu(y+\nu) = \sum_{\lambda=0}^{2n} \frac{\varphi_\mu^{(\lambda)}(y)}{\lambda!}\, \nu^\lambda.$$

Es wird daher

$$\sum_{\nu=-n}^{n} \varphi_\mu(\nu+y)\, \varphi_\nu(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{2n} \frac{\varphi_\mu^{(\lambda)}(y)}{\lambda!}\, \nu^\lambda \right\} \varphi_\nu(x)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{2n} \frac{\varphi_\mu^{(\lambda)}(y)}{\lambda!} \left\{ \sum_{\nu=-n}^{n} \nu^\lambda\, \varphi_\nu(x) \right\},$$

und wegen

$$\sum_{\nu=-n}^{n} \nu^\lambda\, \varphi_\nu(x) = x^\lambda$$

folgt

$$\sum_{\nu=-n}^{n} \varphi_\mu(\nu+y)\, \varphi_\nu(x) = \sum_{\lambda=0}^{2n} \frac{\varphi_\mu^{(\lambda)}(y)}{\lambda!}\, x^\lambda = \varphi_\mu(x+y).$$

§ 5.

Matrizenrelationen.

Betrachten wir die Matrizen

$$\mathfrak{A}(x) = \| \varphi_\nu(x+\mu) \| \, [\nu, \mu = -n, \ldots, n; -\infty < x < \infty], \quad (10)$$

so gilt der Satz:

Notwendig und hinreichend für die Schiebungsvinarianz eines Funktionensystems $\{\varphi_\nu(x)\}$ *ist die Gültigkeit der Relationen* (1) *und*

$$\mathfrak{A}(x)\,\mathfrak{A}(y) = \mathfrak{A}(x+y). \quad (11)$$

Beweis: 1. Ist $\{\varphi_\nu(x)\}$ ein schiebungsinvariantes Funktionensystem, so gilt wegen (9)

$$\sum_{\lambda=-n}^{n} \varphi_\mu(x+\lambda)\,\varphi_\lambda(y+\nu) = \varphi_\mu(x+y+\nu) \, [\nu, \mu = -n, \ldots, n]. \quad (12)$$

Diese Beziehung kann aber als Matrizenrelation gelesen werden:

$$\mathfrak{A}(x)\,\mathfrak{A}(y) = \mathfrak{A}(x+y).$$

2. Umgekehrt folgen sofort aus (11) bzw. (12) wieder die Relationen (9).

Korollar: Ist $\{\varphi_\nu(x)\}$ ein schiebungsinvariantes Funktionensystem, so stellt die Matrizenmenge (10) eine einparametrige, kontinuierliche Abelsche Gruppe dar.

Betrachten wir die Matrizen

$$\mathfrak{A}_i(x) = \| \varphi_\nu^{(i)}(x+\mu) \| \, [\nu, \mu = -n, \ldots, n; i = 0, 1, 2, \ldots; -\infty < x < \infty],$$

so gilt der Satz:

Notwendig und hinreichend für die Schiebungsinvarianz eines Funktionensystems $\{\varphi_\nu(x)\}$ *ist die Gültigkeit der Relationen* (1) *und*

$$\mathfrak{A}_i(x)\,\mathfrak{A}_k(x) = \mathfrak{A}_{i+k}(x+y), \, [i, k = 0, 1, 2, \ldots]. \quad (13)$$

Beweis: 1. Ist $\{\varphi_\nu(x)\}$ ein schiebungsinvariantes Funktionensystem, so gilt wegen (9)

$$\varphi_\mu(x+y+\nu) = \sum_{\lambda=-n}^{n} \varphi_\mu(x+\lambda)\,\varphi_\lambda(y+\nu) \quad [\nu,\mu = -n, \ldots, n].$$

Leiten wir i-mal nach x und k-mal nach y ab, so erhalten wir

$$\sum_{\lambda=-n}^{n} \varphi_\mu^{(i)}(x+\lambda)\,\varphi_\lambda^{(k)}(y+\nu) = \varphi_\mu^{(i+k)}(x+y+\nu) \quad [\nu,\mu = -n, \ldots, n]. \tag{14}$$

Diese Beziehung kann aber als Matrizenrelation gelesen werden:

$$\mathfrak{A}_i(x)\,\mathfrak{A}_k(y) = \mathfrak{A}_{i+k}(x+y).$$

2. Umgekehrt folgen sofort aus (13) bzw. (14) für $i = k = 0$ wieder die Relationen (9).

§ 6.

Charakterisierung der schiebungsinvarianten Funktionensysteme durch Differentialgleichungen.

Satz: Notwendig und hinreichend für die Schiebungsinvarianz eines Funktionensystems $\{\varphi_\nu(x)\}$ *ist die Gültigkeit der Relationen* (1) *und*

$$\varphi'_\mu(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \varphi'_\mu(\nu)\,\varphi_\nu(x) \quad [\mu = -n, \ldots, n]. \tag{15}$$

Beweis: 1. Das Funktionensystem $\{\varphi_\nu(x)\}$ sei schiebungsinvariant. Wir haben vorausgesetzt, dass die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ ganz [1]) sind. Leiten wir daher (9) nach y ab, so folgt, wenn $y = 0$ gesetzt wird,

$$\varphi'_\mu(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \varphi'_\mu(\nu)\,\varphi_\nu(x) \quad [\mu = -n, \ldots, n]. \tag{15}$$

[1]) Wenn wir nur voraussetzen, dass die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ in $-\infty < x < \infty$ differenzierbar sind, so würden wir ebenfalls auf (15) stossen. Da die Lösungen eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten stets ganze Funktionen darstellen, erweist sich somit unsere Voraussetzung als äquivalent mit der eben erwähnten (vgl. § 7).

2. Wir beweisen, dass mit (15) ebenfalls (9) erfüllt ist. Leiten wir (15) nach x ab, so gilt

$$\varphi''_\mu(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \varphi'_\mu(\nu)\,\varphi'_\nu(x)$$

$$= \sum_{\nu=-n}^{n} \varphi'_\mu(\nu) \sum_{\sigma=-n}^{n} \varphi'_\nu(\sigma)\,\varphi_\sigma(x)$$

$$= \sum_{\sigma=-n}^{n} \sum_{\nu=-n}^{n} \varphi'_\mu(\nu)\,\varphi'_\nu(\sigma)\,\varphi_\sigma(x)$$

$$= \sum_{\sigma=-n}^{n} \varphi''_\mu(\sigma)\,\varphi_\sigma(x)\,,$$

oder

$$\varphi''_\mu(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \varphi''_\mu(\nu)\,\varphi_\nu(x)\,.$$

Durch vollständige Induktion gewinnen wir schliesslich

$$\varphi^{(\lambda)}_\mu(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \varphi^{(\lambda)}_\mu(\nu)\,\varphi_\nu(x) \quad [\mu = -n, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots]\,. \tag{16}$$

Setzen wir (16) in die Potenzreihenentwicklung von $\varphi_\mu(x+y)$ ein, so erhalten wir

$$\varphi_\mu(x+y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(\lambda)}_\mu(x)}{\lambda!}\, y^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \varphi^{(\lambda)}_\mu(\nu)\,\varphi_\nu(x)\,\frac{y^\lambda}{\lambda!}$$

$$= \sum_{\nu=-n}^{n} \varphi_\nu(x) \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(\lambda)}_\mu(\nu)}{\lambda!}\, y^\lambda \right\}.$$

oder

$$\varphi_\mu(x+y) = \sum_{\nu=-n}^{n} \varphi_\mu(\nu+y)\,\varphi_\nu(x) \quad [\mu = -n, \ldots, n]\,. \tag{9}$$

Daraus folgt aber nach § 4 die Schiebungsinvarianz des Systems $\{\varphi_\nu(x)\}$.

§ 7.

Charakterisierung der schiebungsinvarianten Funktionensysteme durch schiebungsinvariante lineare Mannigfaltigkeiten.

A. Die schiebungsinvariante lineare Mannigfaltigkeit.

Wir betrachten eine Menge von ganzen Funktionen, welche für reelle Argumente reelle Werte annehmen. Diese Menge nennen wir eine n-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit, wenn folgende Postulate erfüllt sind:

(I) Mit $F(x)$ und $G(x)$ ist auch die Funktion $\lambda F(x) + \mu G(x)$ (λ, μ beliebig, reell) in der Menge enthalten.

(II) Es gibt in der Menge n, aber nicht $n+1$ linear unabhängige Funktionen.

In bekannter Weise stellt ein System von n linear unabhängigen Funktionen einer n-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit eine Basis derselben dar.

Wir nennen die Menge eine n-dimensionale schiebungsinvariante lineare Mannigfaltigkeit, wenn ausser (I) und (II) noch zusätzlich das folgende Postulat erfüllt ist:

(III) Mit $F(x)$ ist auch die Funktion $F^*(x) = F(x+y)$, $(-\infty < y < \infty)$ in der Menge enthalten.

Es gilt der Satz:

Eine n-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann schiebungsinvariant, falls zu einer Basis $\Phi_\nu(x)$ $[\nu = 1, \ldots, n]$ stets n Matrizen $\| A^\lambda_{\mu\nu} \|$ $[\lambda, \nu, \mu = 1, \ldots, n]$ derart existieren, dass gilt

$$\Phi_\lambda(x+y) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} A^\lambda_{\nu\mu} \Phi_\mu(y) \Phi_\nu(x) \quad [\lambda = 1, \ldots, n]. \tag{17}$$

Beweis: 1. $\mathfrak{M}$ sei schiebungsinvariant. Wegen des Postulates (III) gilt

$$\Phi_\lambda(x+y) \subset \mathfrak{M},$$

und daher

$$\Phi_\lambda(x+y) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\lambda\nu}(y)\, \Phi_\nu(x) \qquad (a)$$

$$\Phi_\lambda^{(\sigma)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\lambda\nu}(x)\, \Phi_\nu^{(\sigma)}(0) \quad [\sigma = 0, 1, \ldots, n-1] \qquad (b)$$

$$\Phi_\lambda^{(\sigma)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\lambda\nu}^{(\sigma)}(0)\, \Phi_\nu(x) \quad [\sigma = 0, 1, \ldots, n-1]. \qquad (c)$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der ganzen [1]) Funktionen $\Phi_\nu(x)$ $[\nu = 1, \ldots, n]$ verschwindet die Wronskische Determinante $\operatorname{Det} \left\| \Phi_\nu^{(\sigma)}(x) \right\|$ nicht identisch im Intervall $(-\infty < x < \infty)$. Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, dass die Wronskische Determinante im Nullpunkt nicht verschwindet. Andernfalls wäre das durch eine geeignete Verschiebung des Nullpunktes mit Rücksicht auf (III) zu erreichen.

Wir können daher das System (b) eindeutig nach $\alpha_{\lambda\nu}(x)$ auflösen:

$$\alpha_{\lambda\nu}(x) = \sum_{\sigma=1}^{n} b_{\nu\sigma}\, \Phi_\lambda^{(\sigma)}(x) \quad [\nu = 1, \ldots, n].$$

Dabei bedeutet

$$b_{\nu\sigma} = \frac{B_{\sigma\nu}}{\operatorname{Det} \left\| \Phi_\nu^{(\sigma)}(0) \right\|},$$

wobei $B_{\sigma\nu}$ das algebraische Komplement von $\Phi_\nu^{(\sigma)}(0)$ in $\operatorname{Det} \left\| \Phi_\nu^{(\sigma)}(0) \right\|$ ist.

Wegen (c) folgt

$$\alpha_{\lambda\nu}(x) = \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} b_{\nu\sigma}\, \alpha_{\lambda\mu}^{(\sigma)}(0)\, \Phi_\mu(x)$$

wofür wir schreiben

$$\alpha_{\lambda\nu}(x) = \sum_{\mu=1}^{n} A_{\nu\mu}^{\lambda}\, \Phi_\mu(x), \quad A_{\nu\mu}^{\lambda} = \sum_{\sigma=1}^{n} b_{\nu\sigma}\, \alpha_{\lambda\mu}^{(\sigma)}(0).$$

---

[1]) Dass die Funktionen $F(x) \subset \mathfrak{M}$ ganz sind, falls wir nur ihre Differenzierbarkeit in $(-\infty < x < \infty)$ voraussetzen, folgt aus

$$\Phi_\lambda'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\lambda\nu}'(0)\, \Phi_\nu(x) \quad [\lambda = 1, \ldots, n].$$

Vgl. Seite 18.

Diese Formel in (a) eingesetzt liefert

$$\Phi_\lambda(x+y) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} A^\lambda_{\nu\mu} \Phi_\mu(y) \Phi_\nu(x). \tag{17}$$

2. Wir weisen nach, dass mit (17) das Postulat (III) erfüllt ist. Wenn

$$F(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda \Phi_\lambda(x) \subset \mathfrak{M}$$

so gilt

$$\begin{aligned} F(x+y) &= \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda \Phi_\lambda(x+y) \\ &= \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_\lambda A^\lambda_{\nu\mu} \Phi_\mu(y) \Phi_\nu(x) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \Phi_\nu(x) \subset \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

* * *

Wir betrachten als Beispiel die Menge aller Funktionen der Form

$$F(x) = e^{\alpha x} \{P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x\}.$$

Dabei sind P und Q beliebige Polynome mit reellen Koeffizienten, deren Grad $\leqslant n$ ist; α und β sind feste reelle Zahlen.

Diese lineare Mannigfaltigkeit nennen wir eine Grundmannigfaltigkeit und bezeichnen sie mit $\mathfrak{M}[n, \alpha, \beta]$.

Die Funktionen

$$x^\lambda e^{\alpha x} \cos \beta x, x^\lambda e^{\alpha x} \sin \beta x \; [\lambda = 0, 1, \ldots, n]$$

nennen wir die Elementarbasis von $\mathfrak{M}[n, \alpha, \beta]$.

Es gilt

$$F(x+y) = e^{\alpha x} \{P^*(x) \cos \beta x + Q^*(x) \sin \beta x\},$$

wobei

$$P^*(x) = e^{\alpha y} \{P(x+y) \cos \beta y + Q(x+y) \sin \beta y\},$$

$$Q^*(x) = e^{\alpha y} \{Q(x+y) \cos \beta y - P(x+y) \sin \beta y\}$$

ist. Daher folgt der Satz:

$\mathfrak{M}[n, \alpha, \beta]$ *stellt eine schiebungsinvariante lineare Mannigfaltigkeit dar von der Dimension* $n+1$ *falls* $\beta = 0$, $2n+2$ falls $\beta \neq 0$.

Unter der Summe zweier Grundmannigfaltigkeiten

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}[n_1, \alpha_1, \beta_1] + \mathfrak{M}[n_2, \alpha_2, \beta_2]$$

wollen wir diejenige lineare Mannigfaltigkeit verstehen, welche alle voneinander verschiedenen Funktionen der beiden Elementarbasen als Basis besitzt. Diese nennen wir die Elementarbasis von $\mathfrak{M}$. Weil $\mathfrak{M}$ ebenfalls schiebungsinvariant ist, folgt der Satz:

Die Summe von endlich vielen Grundmannigfaltigkeiten bildet eine schiebungsinvariante lineare Mannigfaltigkeit.

Entscheidend ist nun, dass die Umkehrung dieses Satzes gilt:

Jede endlich-dimensionale schiebungsinvariante lineare Mannigfaltigkeit lässt sich als Summe von endlich vielen Grundmannigfaltigkeiten darstellen.

Beweis: Stellen die Funktionen $\Phi_\lambda(x)\,[\lambda = 1, \ldots, n]$ eine Basis einer n-dimensionalen schiebungsinvarianten linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ dar, so erfüllen sie wegen (17) die Relationen

$$\begin{gathered} \Phi'_\lambda(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C_{\lambda\nu}\, \Phi_\nu(x)\,[\lambda = 1, \ldots, n] \\ C_{\lambda\nu} = \sum_{\mu=1}^{n} A^{\lambda}_{\nu\mu}\, \Phi'_\mu(0)\,. \end{gathered} \tag{18}$$

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y'_\lambda(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C_{\lambda\nu}\, y_\nu(x)\,[\lambda = 1, \ldots, n]\,. \tag{19}$$

Jede Komponente $y_\lambda(x)$ einer Lösung $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ von (19) setzt sich linear und homogen mit geeigneten konstanten Koeffizienten aus den n linear unabhängigen Funktionen

$$e^{\omega_j x},\ x e^{\omega_j x},\ \ldots,\ x^{\sigma_j - 1} e^{\omega_j x}\,[j = 1, \ldots, m] \sum_{j=1}^{m} \sigma_j = n$$

zusammen [1]).

[1]) Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, Bd. III, Seite 312. Teubner 1914.

Dabei stellen die $\omega_1, \ldots, \omega_m$ die verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung n-ten Grades

$$\text{Det} \left\| C_{\lambda\nu} - \delta_{\lambda\nu}\omega \right\| = 0, \tag{20}$$

und die $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ ihre Vielfachheiten dar.

Da die $C_{\lambda\nu}$ reell sind, tritt mit $\omega_j = \alpha_j + i\beta_j$ (α_j, β_j reell) ebenfalls $\overline{\omega} = \alpha_j - i\beta_j$ als Wurzel auf, und zwar mit derselben Vielfachheit. Befinden sich unter den Wurzeln $\omega_1, \ldots, \omega_m$ $2l$ komplexe, so ordnen wir sie unter gleichzeitiger Abänderung der Numerierung wie folgt

$$\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \ldots, \alpha_l + i\beta_l, \alpha_l - i\beta_l; \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_r \cdot (r = m - l).$$

Für ihre Vielfachheiten ist zu setzen

$$\sigma_1, \sigma_1, \ldots, \sigma_l, \sigma_l; \sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_r.$$

Weil $\{\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)\}$ eine Lösung von (19) darstellt und jede Funktion $\Phi_\lambda(x)$ reell ist, gilt

$$\Phi_\lambda(x) = \sum_{j=1}^{l} \{P_{\varrho_j}^{\lambda}(x)\, e^{(\alpha_j + i\beta_j)x} + \overline{P}_{\varrho_j}^{\lambda}(x)\, e^{(\alpha_j - i\beta_j)x}\} + \sum_{j=l+1}^{r} P_{\varrho_j}^{\lambda}(x)\, e^{\alpha_j x}$$

oder

$$\Phi_\lambda(x) = \sum_{j=1}^{l} e^{\alpha_j x} \{R_{\varrho_j}^{\lambda}(x) \cos \beta_j x + Q_{\varrho_j}^{\lambda}(x) \sin \beta_j x\} + \sum_{j=l+1}^{r} P_{\varrho_j}^{\lambda}(x)\, e^{\alpha_j x}$$
$$[\varrho_j \leqslant \sigma_j - 1, \lambda = 1, \ldots, n]. \tag{21}$$

Nach (21) setzen sich also die Funktionen $\Phi_\lambda(x)$ linear und homogen mit reellen Koeffizienten aus dem System

$$\left.\begin{array}{l} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, x e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \ldots, x^{\sigma_j - 1} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [j = 1, \ldots, l] \\ e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, x e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, \ldots, x^{\sigma_j - 1} e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x \\ e^{\alpha_j x}, x e^{\alpha_j x}, \ldots, x^{\sigma_j - 1} e^{\alpha_j x} \qquad [j = l + 1, \ldots, r] \end{array}\right\} \tag{22}$$

zusammen.

Dass in (21) jede dieser n Funktionen auftritt, folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\Phi_\lambda(x)$. Das System (22),

für welches wir einfach schreiben $\Psi_\nu(x)\,[\nu = 1, \ldots, n]$, ist vollständig charakterisiert durch die n Wurzeln der Gleichung (20) und stellt die Elementarbasis von $\mathfrak{M}$ dar. Wir haben somit für $\mathfrak{M}$ die Summendarstellung

$$\mathfrak{M} = \sum_{j=1}^{l} \mathfrak{M}\,[\sigma_j - 1, \alpha_j, \beta_j] + \sum_{j=l+1}^{r} \mathfrak{M}\,[\sigma_j - 1, \alpha_j, 0]$$

gewonnen.

B. Schiebungsinvariante Funktionensysteme und schiebungsinvariante lineare Mannigfaltigkeiten.

Satz: Die Funktionen $\varphi_\nu(x)\,[\nu = -n, \ldots, n]$ *bilden dann und nur dann ein schiebungsinvariantes System, falls sie eine Basis einer* $(2n+1)$*-dimensionalen schiebungsinvarianten linearen Mannigfaltigkeit darstellen und die Relationen* (1) *erfüllen.*

Beweis: 1. Erfüllen die Basisfunktionen $\varphi_\nu(x)\,[\nu = -n, \ldots, n]$ einer $(2n+1)$-dimensionalen schiebungsinvarianten linearen Mannigfaltigkeit die Relationen (1), so folgt aus dem Differentialgleichungssystem (18), wenn wir für x der Reihe nach die Werte $-n, \ldots, n$ einsetzen:

$$\varphi'_\lambda(-n) = C_{\lambda,-n}, \ldots, \varphi'_\lambda(n) = C_{\lambda,n}.$$

Daher geht (18) über in

$$\varphi'_\lambda(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \varphi'_\lambda(\nu)\,\varphi_\nu(x)\,[\lambda = -n, \ldots, n]. \tag{15}$$

Nach § 6 folgt aber daraus die Schiebungsinvarianz des Funktionensystems $\{\varphi_\nu(x)\}$.

2. Besitzt eine $(2n+1)$-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit ein schiebungsinvariantes Funktionensystem als Basis, so folgt ihre Schiebungsinvarianz sofort wegen der Gültigkeit der Relationen (9).

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, dass eine $(2n+1)$*-dimensionale schiebungsinvariante lineare Mannigfaltigkeit mit der Elementarbasis* $\Psi_k(x)\,[k = -n, \ldots, n]$ *ein schiebungsinvariantes Funktionensystem* $\varphi_\nu(x)\,[\nu = -n, \ldots, n]$ *enthält, ist*

$$\operatorname{Det} \|\Psi_k(\mu)\| \neq 0\,[k, \mu = -n, \ldots, n]. \tag{23}$$

Gilt (23), so bezeichnen wir eine solche Mannigfaltigkeit mit $\mathfrak{S}$.

Die Richtigkeit der Behauptung ergibt sich daraus, dass die $2n+1$ inhomogenen Gleichungssysteme

$$\varphi_\nu(\mu) = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_{\nu k} \Psi_k(\mu) = \delta_{\nu\mu} \quad [\mu = -n, \ldots, n]$$

$$[\nu = -n, \ldots, n]$$

simultan Lösungen besitzen müssen, was dann und nur dann der Fall, wenn die Bedingung (23) erfüllt ist. Da die Matrix $\|\lambda_{\nu k}\|$ in eindeutiger Weise bestimmt wird, enthält $\mathfrak{S}$ genau ein schiebungsinvariantes Funktionensystem.

Zusammenfassend können wir sagen:

Die Funktionen $\varphi_\nu(x)\,[\nu = -n, \ldots, n]$ eines schiebungsinvarianten Systems lassen sich durch die Funktionen $\Psi_k(x)\,[k = -n, \ldots, n]$ der Elementarbasis einer bestimmten $(2n+1)$-dimensionalen schiebungsinvarianten linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}$ in der Form

$$\varphi_\nu(x) = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_{\nu k} \Psi_k(x) \quad [\nu = -n, \ldots, n]$$

darstellen.

Umgekehrt ist in jeder $(2n+1)$-dimensionalen schiebungsinvarianten linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}$ genau ein schiebungsinvariantes System von $2n+1$ Funktionen enthalten.

Beispiele:

1. $\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\,[2n, 0, 0]$ enthält die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ der Interpolation von Lagrange. Das System

$$1, x, \ldots, x^{2n}$$

stellt die Elementarbasis dar.

2. $\mathfrak{S} = \sum_{\sigma=0}^{n} \mathfrak{M}\left|0, 0, \frac{2\pi}{2n+1}\sigma\right|$ enthält die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ der trigonometrischen Interpolation. Das System

$$1, \cos\frac{2\pi}{2n+1}\sigma x, \sin\frac{2\pi}{2n+1}\sigma x\,[\sigma = 1, \ldots, n]$$

stellt die Elementarbasis dar.

3. Bedeutet ϱ eine beliebige ganze Zahl, so enthält

$$\mathfrak{S} = \sum_{\sigma=0}^{n} \mathfrak{M}\left[0, 0, \frac{2\pi}{2n+1}\,\sigma + 2\pi\varrho\right]$$

das schiebungsinvariante System

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+1}\sum_{\sigma=1}^{n} \cos\left[\left(\frac{2\pi}{2n+1}\,\sigma + 2\pi\varrho\right)(x-\nu)\right]$$

$$[\nu = -n, \ldots, n].$$

Dafür können wir unter Verwendung der Summenformel (7) schreiben

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{2n+1} + \frac{\sin\left[2\pi\varrho(x-\nu) + \pi(x-\nu)\right] - \sin\left[2\pi\varrho(x-\nu) + \dfrac{\pi(x-\nu)}{2n+1}\right]}{(2n+1)\,\sin\dfrac{\pi(x-\nu)}{2n+1}}$$

$$[\nu = -n, \ldots, n]. \qquad (24)$$

Speziell für $\varrho = 0$ geht (24) über in (8).

* * *

Anmerkung: Für die betrachteten schiebungsinvarianten Systeme (5), (8) und (24) gilt

$$\varphi_{-\nu}(x) = \varphi_\nu(-x)\,[\nu = 0, 1, \ldots, n].$$

Falls ein symmetrisches Ordinatensystem

$$A_\nu = A_{-\nu}\,[\nu = 0, 1, \ldots, n]$$

vorliegt, ist daher die interpolierende Funktion (2) stets gerade.

§ 8.

Die schiebungsinvariante lineare Interpolation auf unendlichem Intervall.

Wir wenden uns kurz dem Problem der schiebungsinvarianten linearen Interpolation auf unendlichem Intervall zu.

Es handelt sich um folgendes:

Den ganzzahligen Argumentwerten $\nu = -\infty, \ldots, \infty$ ordnen wir ein System von reellen Ordinatenwerten $\{A_\nu\}$ zu, wobei im Hinblick auf die sich stellende Konvergenzfrage

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu^2 = s \tag{25}$$

vorausgesetzt wird [1]).

Eine schiebungsinvariante lineare Interpolation auf unendlichem Intervall bedingt die Existenz eines Systems $\varphi_\nu(x)\,[\nu = -\infty, \ldots, \infty]$ von ganzen Funktionen, welche für reelle Argumente reelle Werte annehmen und den vier Forderungen genügen:

1. $\varphi_\nu(\mu) = \delta_{\nu\mu}\,[\nu, \mu = -\infty, \ldots, \infty]$ (26)

2. $\varphi_0(x) = \varphi_0(-x)$ (27)

3. Die Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu \varphi_\nu(x) \equiv F(x) \tag{28}$$

konvergiert in jedem abgeschlossenen Teilintervall gleichmässig für jede Folge $\{A_\nu\}$ konvergenter Quadratsumme.

4. Es besteht die Identität

$$F(x+y) \equiv \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F(\nu+y)\varphi_\nu(x)\,[-\infty < x, y < \infty]\,. \tag{29}$$

In dieser Forderung ist die Konvergenz der angeschriebenen Reihe miteingeschlossen.

Ein derartiges System nennen wir ein unendliches schiebungsinvariantes Funktionensystem.

$F(x)$ stellt die interpolierende Funktion dar.

Wir zeigen nun:

Notwendig und hinreichend für die Schiebungsinvarianz eines unendlichen Funktionensystems $\{\varphi_\nu(x)\}$ *ist die Gültigkeit der Relationen*

$$\varphi_\nu(x) = \varphi(x-\nu)\,[\nu = -\infty, \ldots, \infty]\,. \tag{30}$$

---

[1]) Wir verstehen unter

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} C_\nu \text{ stets } \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} C_\nu\,.$$

Dabei erfüllt die Funktion

$$\varphi(x) \equiv \varphi_0(x) \tag{31}$$

die Funktionalgleichung

$$\varphi(x-y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \varphi(x+\nu)\,\varphi(y+\nu) \tag{32}$$

und die Nebenbedingung

$$\varphi(0) = 1\,. \tag{33}$$

Beweis: 1. Es sei $\{\varphi_\nu(x)\}$ ein unendliches schiebungsinvariantes Funktionensystem.

Wenn wir die Ordinatensysteme

$$\{A_{\mu\nu}\} = \delta_{\mu\nu}\,[\nu, \mu = -\infty, \ldots, \infty]$$

wählen, folgt aus (29)

$$\varphi_\mu(x+y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \varphi_\mu(\nu+y)\,\varphi_\nu(x)\,[\mu = -\infty, \ldots, \infty]\,. \tag{34}$$

Ersetzen wir y durch μ und x durch $x-\mu$, so erhalten wir wegen (26)

$$\varphi_\mu(x) = \varphi_0(x-\mu) = \varphi(x-\mu)\,[\mu = -\infty, \ldots, \infty]\,.$$

Damit haben wir zunächst erkannt, dass das System $\{\varphi_\nu(x)\}$ notwendig die Gestalt (30) besitzt.

Es geht (34) für $\mu = 0$ über in

$$\varphi(x+y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \varphi(y+\nu)\,\varphi(x-\nu)$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \varphi(x+\nu)\,\varphi(y-\nu)\,.$$

Wegen (27) ergibt sich schliesslich

$$\varphi(x-y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \varphi(x+\nu)\,\varphi(y+\nu)\,, \tag{32}$$

wobei mit Rücksicht auf (26) gilt

$$\varphi(0) = 1\,. \tag{33}$$

Wir haben also gezeigt, dass die Funktion (31) notwendig die Relationen (32) und (33) erfüllen muss.

2. Wir weisen nach, dass das System (30) die oben gestellten vier Forderungen erfüllt.

1. In Verbindung mit (33) folgt aus (32), falls wir $y = x$ setzen

$$\varphi(0) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \varphi^2(x+\nu) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \varphi^2(x-\nu) = 1 \tag{35}$$

und daraus für $x = 0$

$$\varphi(\nu) = \delta_{0\nu}. \tag{36}$$

Somit gelten für das System (30) die Relationen (26).

2. Jede Lösung von (32) ist gerade, was wir durch Vertauschung von x und y erkennen. Wegen (31) gilt daher (27).

3. Im Hinblick auf (25) und (35) gewinnen wir durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung für den Reihenrest $R_n(x)$ von (28) die Abschätzung

$$|R_n(x)| \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |A_\nu \varphi(x-\nu)| + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |A_{-\nu} \varphi(x+\nu)| \leqslant \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_{-\nu}^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{37},$$

denn es gilt für jedes $m > n+1$,

$$\left\{\sum_{\nu=n+1}^{m} |A_\nu \varphi(x-\nu)|\right\}^2 \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{m} A_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=n+1}^{m} \varphi^2(x-\nu) \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu^2$$

und ebenso

$$\left\{\sum_{\nu=n+1}^{m} |A_{-\nu} \varphi(x+\nu)|\right\}^2 \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{m} A_{-\nu}^2 \cdot \sum_{\nu=n+1}^{m} \varphi^2(x+\nu) \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_{-\nu}^2.$$

Die rechte Seite von (37) kann unabhängig von x beliebig klein gemacht werden, falls nur n hinreichend gross gewählt wird. Damit ist aber erwiesen, dass die Reihe (28) in jedem abgeschlossenen Teilintervall gleichmässig konvergiert.

4. Es wird

$$F(x+y) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} A_\mu \varphi(x+y-\mu) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\mu \varphi(\nu+y-\mu)\, \varphi(x-\nu). \tag{38}$$

Vertauschen wir die Summation über μ und ν, so konvergiert die entstehende Doppelreihe und besitzt denselben Wert, falls für den Ausdruck

$$R_{m,n}(x,y)=\sum_{\mu=-m}^{m}\left\{\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}A_\mu\varphi(\nu+y-\mu)\,\varphi(x-\nu)-\sum_{\nu=-n}^{n}A_\mu\varphi(\nu+y-\mu)\,\varphi(x-\nu)\right\}$$

stets gilt [1])

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}R_{m,n}(x,y)=0\,.$$

Dass diese Bedingung erfüllt ist, zeigen wir wie folgt:

Durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung und mit Rücksicht auf (32) folgt zunächst

$$R^2_{m,n}(x,y)\leqslant\sum_{\mu=-m}^{m}A_\mu^2\cdot\sum_{\mu=-m}^{m}\left\{\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\varphi(\nu+y-\mu)\,\varphi(x-\nu)-\sum_{\nu=-n}^{n}\varphi(\nu+y-\mu)\,\varphi(x-\nu)\right\}^2=$$

$$=\sum_{\mu=-m}^{m}A_\mu^2\cdot\sum_{\mu=-m}^{m}\{\varphi(x+y-\mu)-\sum_{\nu=-n}^{n}\varphi(\nu+y-\mu)\,\varphi(x-\nu)\}^2\,.$$

Dafür können wir schreiben

$$R^2_{m,n}(x,y)\leqslant\sum_{\mu=-m}^{m}A_\mu^2\cdot\left\{\sum_{\mu=-m}^{m}\varphi^2(x+y-\mu)-2\sum_{\mu=-m}^{m}\sum_{\nu=-n}^{n}\varphi(x+y-\mu)\,\varphi(\nu+y-\mu)\,\varphi(x-\nu)+\right.$$

$$\left.+\sum_{\mu=-m}^{m}\sum_{\nu=-n}^{n}\sum_{\lambda=-n}^{n}\varphi(\nu+y-\mu)\,\varphi(\lambda+y-\mu)\,\varphi(x-\nu)\,\varphi(x-\lambda)\right\}$$

oder

$$R^2_{m,n}(x,y)\leqslant\sum_{\mu=-m}^{m}A_\mu^2\left\{\sum_{\mu=-m}^{m}\varphi^2(x+y-\mu)-2\sum_{\nu=-n}^{n}\varphi(x-\nu)\sum_{\mu=-m}^{m}\varphi(x+y-\mu)\,\varphi(\nu+y-\mu)+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=-n}^{n}\sum_{\lambda=-n}^{n}\varphi(x-\nu)\,\varphi(x-\lambda)\sum_{\mu=-m}^{m}\varphi(\nu+y-\mu)\,\varphi(\lambda+y-\mu)\right\}.$$

Unter Berücksichtigung von (25), (32), (35) und (36) wird nun

$$\lim_{m\to\infty}R^2_{m,n}(x,y)\leqslant s\left\{1-2\sum_{\nu=-n}^{n}\varphi^2(x-\nu)+\sum_{\nu=-n}^{n}\varphi^2(x-\nu)\right\}$$

---

[1]) K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Seite 250 (Markoffsche Reihentransformation). Springer. Berlin 1931.

oder

$$\lim_{m\to\infty} \left| R_{m,n}(x,y) \right| \leqslant s^{\frac{1}{2}} \left\{1 - \sum_{\nu=-n}^{n} \varphi^2(x-\nu)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Schliesslich ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \left| R_{m,n}(x,y) \right| = 0.$$

Für (38) dürfen wir daher setzen

$$F(x+y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} A_\mu \varphi(\nu+y-\mu)\, \varphi(x-\nu),$$

woraus aber sofort folgt

$$F(x+y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F(\nu+y)\, \varphi(x-\nu). \tag{29}$$

Nachdem unser Satz bewiesen ist, suchen wir Lösungen der Funktionalgleichung (32) zu ermitteln, wobei die Nebenbedingung (33) zu berücksichtigen ist.

Unser Vorgehen besteht darin, bei der Funktion $\varphi_{0,n}(x)$ [1]) einiger spezieller schiebungsinvarianter Systeme von $2n+1$ Funktionen rein formal den Grenzübergang $n \to \infty$ zu vollziehen. Nachträglich verifizieren wir dann, dass die so gewonnenen Funktionen die gewünschten Eigenschaften aufweisen.

1. Bei der Interpolation von Lagrange können wir nach (5) für die Funktion $\varphi_{0,n}(x)$ schreiben

$$\varphi_{0,n}(x) = (-1)^n \frac{(x^2-1^2)(x^2-2^2)\ldots(x^2-n^2)}{1^2 \quad 2^2 \quad \ldots \quad n^2}$$

oder

$$\varphi_{0,n}(x) = \left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right).$$

Es wird

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{0,n}(x) = \varphi(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right).$$

[1]) Der Index n weist darauf hin, dass das schiebungsinvariante System, aus dem die Funktion stammt, $2n+1$ Funktionen umfasst.

In bekannter Weise konvergiert das angeschriebene unendliche Produkt für jedes x.

Der Vergleich mit der Produktdarstellung der sin-Funktion ergibt [1])

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}. \tag{39}$$

2. Bei der trigonometrischen Interpolation ist für die Funktion $\varphi_{0,n}(x)$ nach (8) zu setzen

$$\varphi_{0,n}(x) = \frac{\sin \pi x}{(2n+1) \sin \dfrac{\pi x}{2n+1}}.$$

Es wird

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_{0,n}(x) = \varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}. \tag{39}$$

Besonders beachtenswert ist die Tatsache, dass der formale Grenzübergang bei der trigonometrischen Interpolation und Lagrangeschen Interpolation zur nämlichen Funktion führt.

3. Bei dem schiebungsinvarianten Funktionensystem (24) ist für die Funktion $\varphi_{0,n}(x)$ zu setzen

$$\varphi_{0,n}(x) = \frac{1}{2n+1} + \frac{\sin (2\pi\varrho x + \pi x) - \sin \left(2\pi\varrho x + \dfrac{\pi x}{2n+1}\right)}{(2n+1) \sin \dfrac{\pi x}{2n+1}}.$$

Es wird

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_{0,n}(x) = \varphi(x) = \frac{\sin (2\varrho+1)\pi x - \sin 2\varrho\pi x}{\pi x}. \tag{40}$$

Dabei bedeutet ϱ eine beliebige ganze Zahl. Speziell für $\varrho = 0$ geht (40) über in (39). Wir merken an, dass (40) auch auf die Form

$$\varphi(x) = \frac{\sin \dfrac{\pi x}{2} \cos (4\varrho+1) \dfrac{\pi x}{2}}{\dfrac{\pi x}{2}} \tag{41}$$

gebracht werden kann.

[1]) K. Knopp, Funktionentheorie, Sammlung Göschen, Bd. 703, Seite 33.

Für $x = 0$ erhalten wir

$$\varphi(0) = 1 . \tag{33}$$

Wir verifizieren, dass (40) der Funktionalgleichung (32) genügt. Wegen

$$\varphi(x+\nu) = \frac{(-1)^\nu}{\pi(x+\nu)} \sin (2\varrho+1)\pi x - \frac{1}{\pi(x+\nu)} \sin 2\pi\varrho x$$

wird

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \varphi(x+\nu)\,\varphi(y+\nu) = \\
&\sin (2\varrho+1)\pi x \sin (2\varrho+1)\pi y \frac{1}{\pi^2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)(y+\nu)} - \\
&- \sin (2\varrho+1)\pi x \sin 2\pi\varrho y \frac{1}{\pi^2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(x+\nu)(y+\nu)} - \\
&- \sin (2\varrho+1)\pi y \sin 2\pi\varrho x \frac{1}{\pi^2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(x+\nu)(y+\nu)} + \\
&+ \sin 2\pi\varrho x \sin 2\pi\varrho y \frac{1}{\pi^2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)(y+\nu)} .
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Die Mittag-Lefflersche Partialbruchzerlegung der Funktionen $\pi \operatorname{cotg} \pi z$ und $\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ lautet [1])

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \left\{ \frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu} \right\}$$

und

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' (-1)^\nu \left\{ \frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu} \right\} .$$

[1]) Hurwitz-Courant, Allgemeine Funktionentheorie, Seiten 119 und 120 Springer. Berlin 1922.

Dabei deutet das Komma an dem Summenzeichen an, dass in der Summe das $\nu = 0$ entsprechende Glied auszulassen ist.

Wir erhalten daher

$$\frac{\pi \operatorname{cotg} \pi y - \pi \operatorname{cotg} \pi x}{x - y} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(x+\nu)(y+\nu)}$$

und

$$\frac{1}{(x-y)} \left\{ \frac{\pi}{\sin \pi y} - \frac{\pi}{\sin \pi x} \right\} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^\nu}{(x+\nu)(y+\nu)} .$$

Setzen wir diese Formeln in (42) ein, so ergibt sich für die rechte Seite nach einigen Umformungen

$$\frac{\sin (2\varrho+1)\pi(x-y) - \sin 2\pi\varrho (x-y)}{\pi (x-y)} = \varphi(x-y) ,$$

womit wir gezeigt haben, dass die Funktionalgleichung (32) erfüllt ist.

Bezugnehmend auf den Satz dieses Paragraphen und mit Rückblick auf (41) können wir zusammenfassend sagen:

Die Funktionen

$$\varphi(x) = \frac{\sin \frac{\pi x}{2} \cos (4\varrho+1) \frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}} \quad [\varrho = 0, \pm 1, \pm 2, \pm, \ldots]$$

genügen der Funktionalgleichung (32) und der Nebenbedingung (33).

Daher stellt

$$\varphi_\nu(x) = \frac{\sin \frac{\pi(x-\nu)}{2} \cos (4\varrho+1) \frac{\pi(x-\nu)}{2}}{\frac{\pi(x-\nu)}{2}} \quad [\nu = -\infty, \ldots, \infty]$$

für $\varrho = 0, \pm 1, \pm 2, \pm, \ldots$ ein unendliches schiebungsinvariantes Funktionensystem im Sinne der Charakterisierung (25) bis (29) dar.

Schlussbemerkung.

In der vorliegenden Arbeit führten wir den Begriff der schiebungsinvarianten linearen Interpolation auf endlichem und unendlichem Intervall ein. Diese Begriffsbildung stösst vorwiegend auf theoretisches Interesse.

Unsere Untersuchungen richteten sich vornehmlich auf die vielgestaltigen mathematischen Eigenschaften der Funktionensysteme, welche zu einer schiebungsinvarianten linearen Interpolation auf endlichem Intervall Anlass geben. Dabei erwies sich die Einführung des Begriffes der schiebungsinvarianten linearen Mannigfaltigkeit als vorteilhaft.

Lebenslauf.

Ich wurde am 18. Dezember 1912 in Muri bei Bern geboren. Im Frühjahr 1932 erwarb ich das bernische Primarlehrerpatent. Nach dem Besuche der Lehramtsschule bestund ich 1936 die bernische Sekundarlehrerprüfung mathematisch-naturwissenschaftlicher Richtung. Während vier Jahren amtierte ich an Primar- und Sekundarschulen. Seit dem Sommersemester 1938 studierte ich an der Universität Bern Versicherungsmathematik, Mathematik und theoretische Nationalökonomie.